16ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωμετρίας
27–29 Σεπτεμβρίου 2024
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

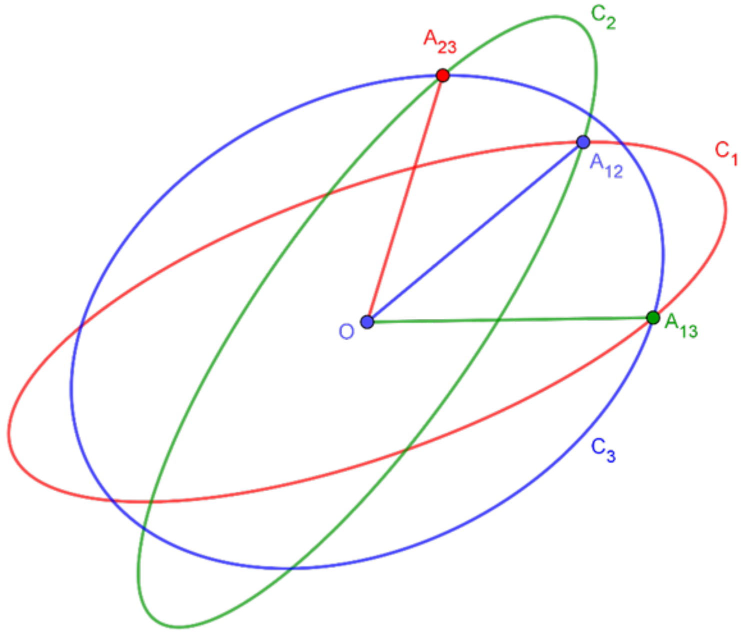
Κωνικές Διπλής Επαφής σε Ενελιξη

Journal for Geometry and Graphics **28**(1), 55–72, 2024.

Γεώργιος Λευκαδίτης
Τμήμα Αρχιτεκτονικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Δρ Αναστασία Ταουκτσόγλου
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

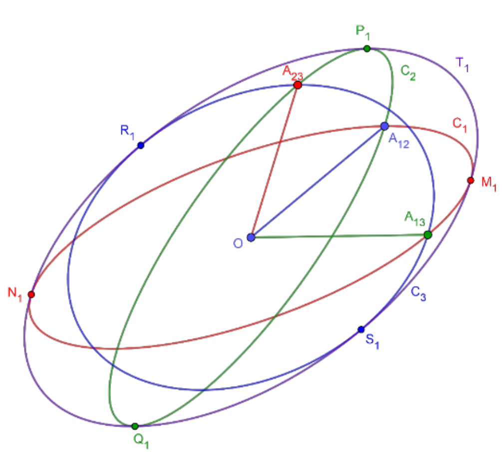
Το Πρόβλημά μας

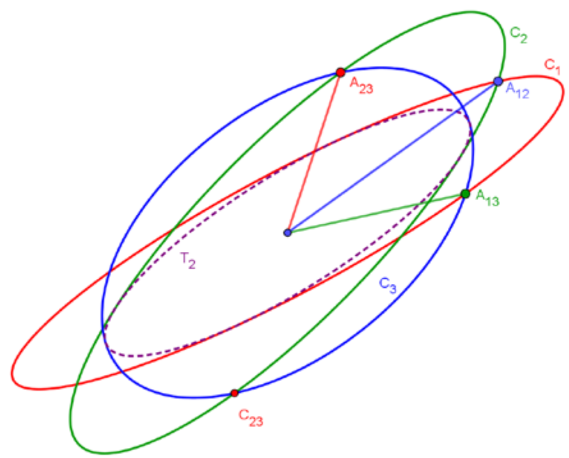


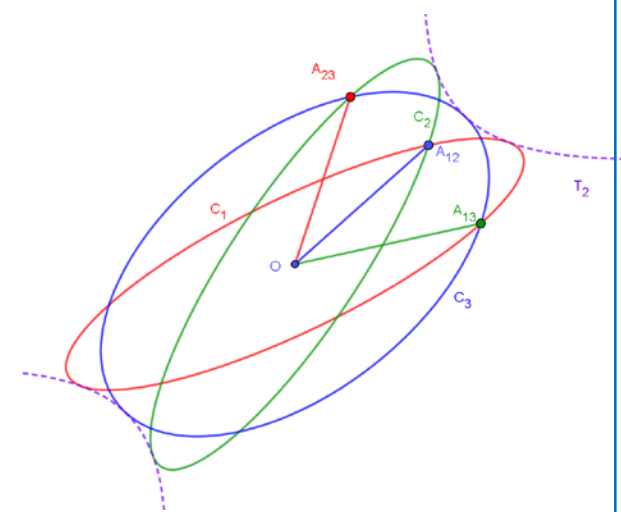
- Δίνονται 3 τμήματα OA_{13}, OA_{12}, OA_{23} του επιπέδου.
- Κάθε ζεύγος τμημάτων θεωρείται ζεύγος συζυγών ημιδιαμέτρων έλλειψης.
- Έτσι, ορίζονται 3 ομόκεντρες ελλείψεις C_1, C_2, C_3 *αμοιβαία συζυγείς*.

Το Πρόβλημά μας

- Ζητούμε να κατασκευάσουμε με μεθόδους Συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας του επιπέδου όλες τις κωνικές, που εφάπτονται στις C_1, C_2, C_3 .

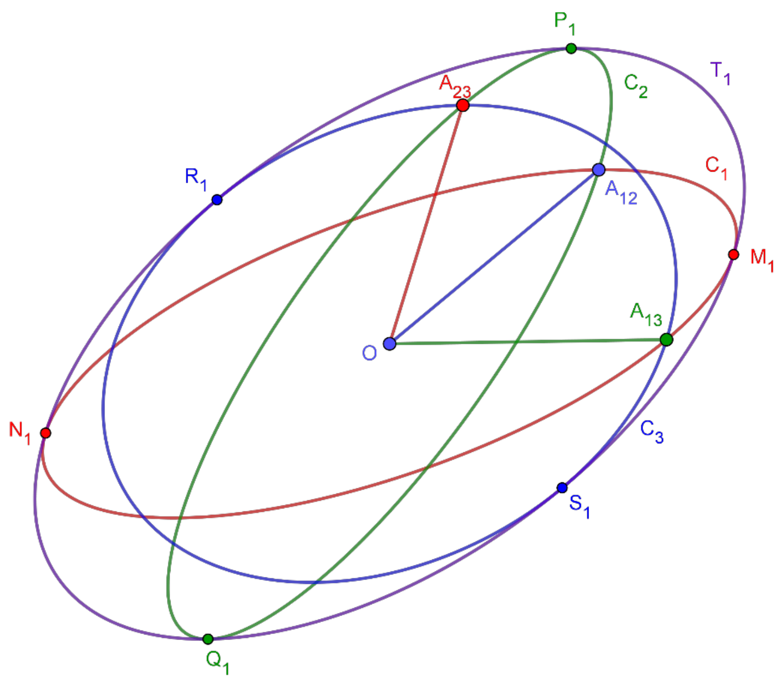






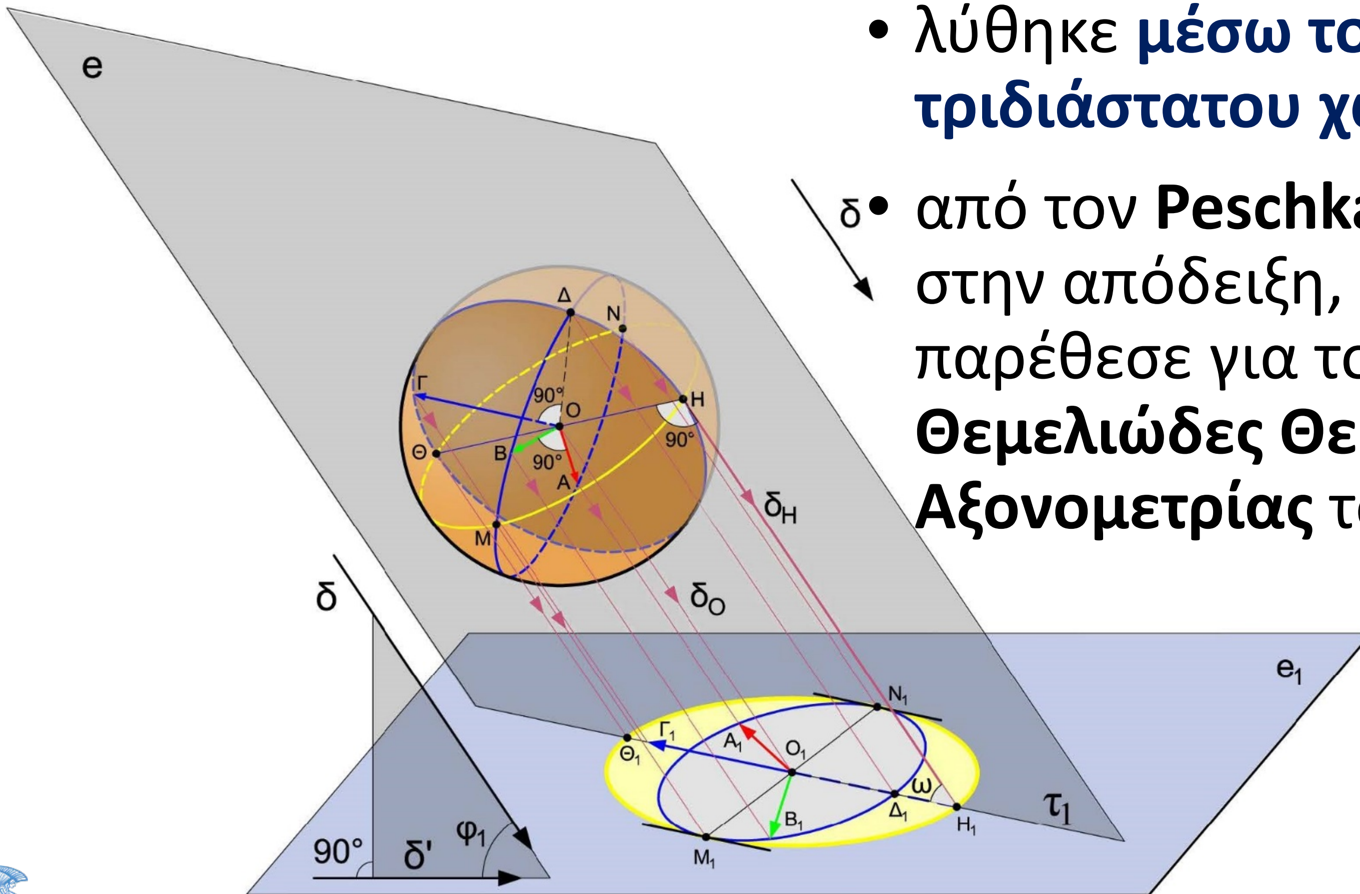
Το κίνητρο για την έρευνάς μας…

Το “Πρόβλημα των Τεσσάρων Ελλείψεων”



- Το πρόβλημα της εύρεσης 4ης έλλειψης, **περιγεγραμμένης** στις 3 δοθείσες ελλείψεις…

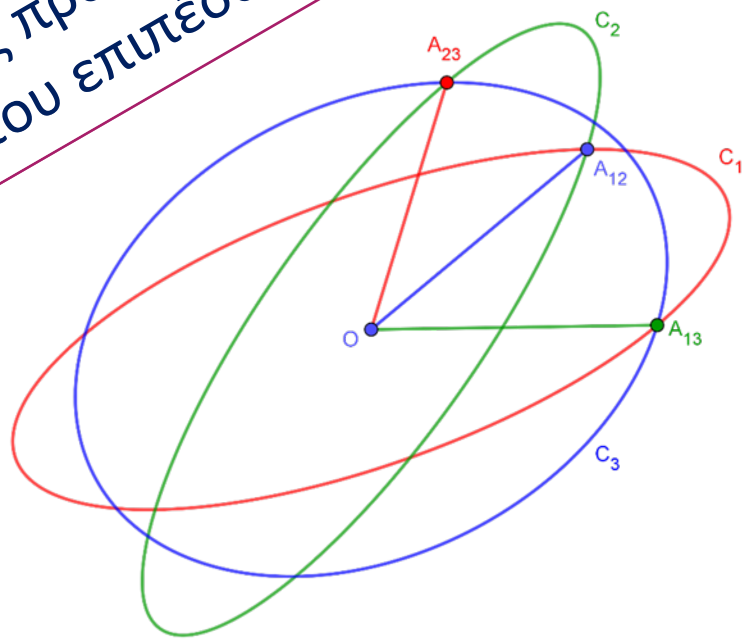
Το “Πρόβλημα των Τεσσάρων Ελλείψεων”



- λύθηκε **μέσω του τριδιάστατου χώρου**
- από τον **Peschka** (1879) στην απόδειξη, που παρέθεσε για το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Αξονομετρίας** του Pohlke.

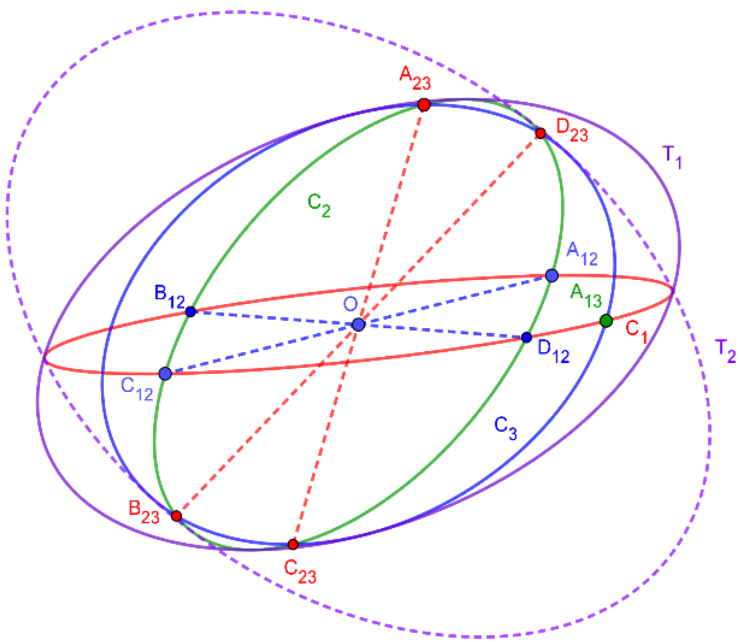
Το “Πρόβλημα των Τεσσάρων Ελλείψεων”

ως πρόβλημα του επιπέδου



- Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα ως πρόβλημα του επιπέδου
- αποδείξαμε σε παλαιότερες εργασίες με Αναλυτική Γεωμετρία ότι…
- το **πολύ δύο περιγεγραμμένες κωνικές** υπάρχουν, που είναι και ομόκεντρες προς τις αρχικές.

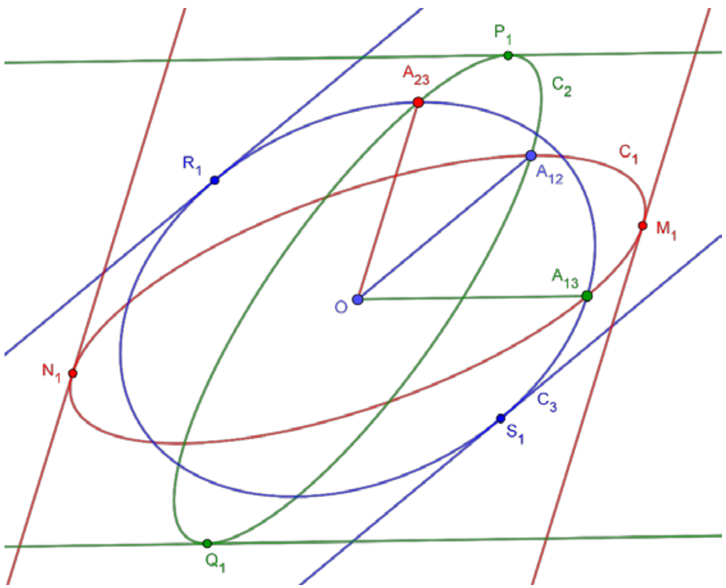
Το “Πρόβλημα των Τεσσάρων Ελλείψεων”

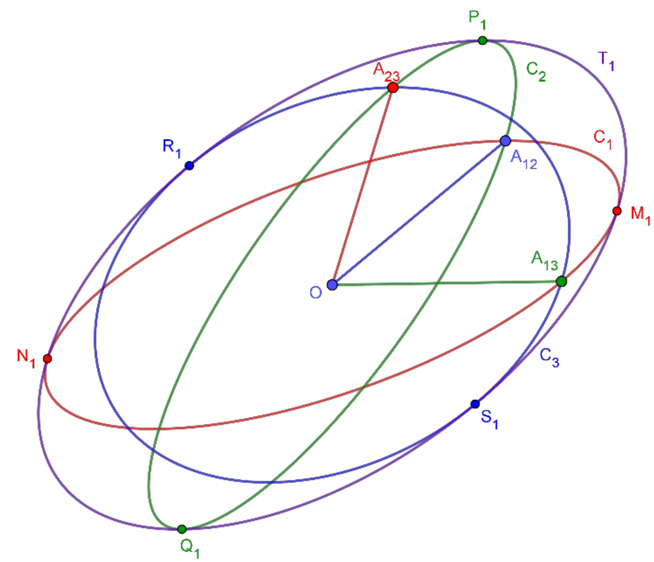


- Η μία από αυτές υπάρχει πάντα, είναι έλλειψη και καλείται **πρωτεύουσα λύση** T_1.
- Η δεύτερη περιγεγραμμένη (αν υπάρχει) είναι έλλειψη ή υπερβολή και καλείται **δευτερεύουσα λύση** T_2.

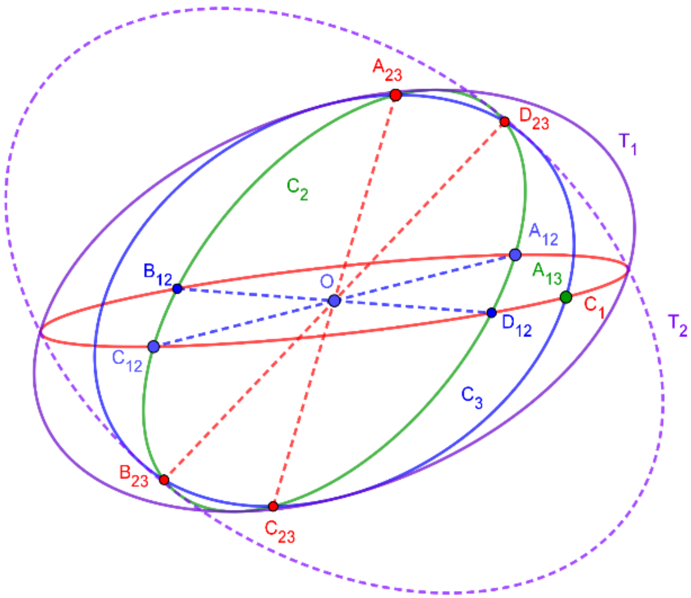
Το “Πρόβλημα των Τεσσάρων Ελλείψεων”

- Επιπλέον, κατασκευάσαμε σε παλαιότερες εργασίες την **πρωτεύουσα λύση** T_1 χρησιμοποιώντας μεθόδους Συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας του επιπέδου.





Το “Πρόβλημα των Τεσσάρων Ελλείψεων”

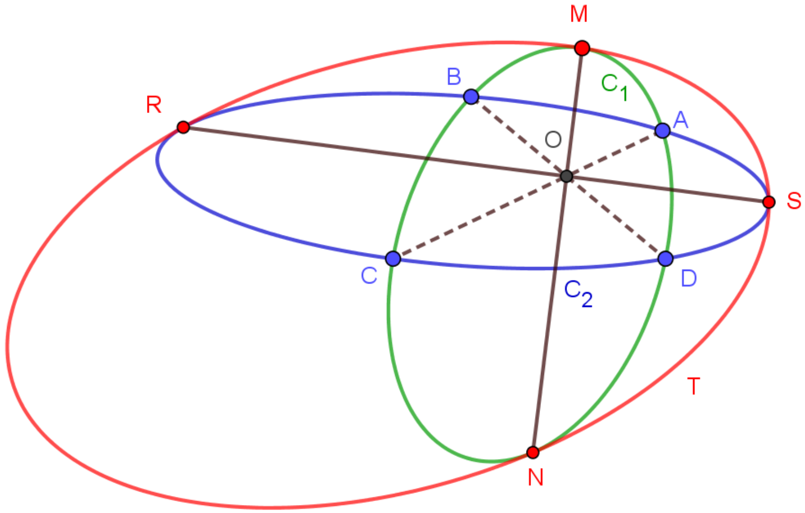


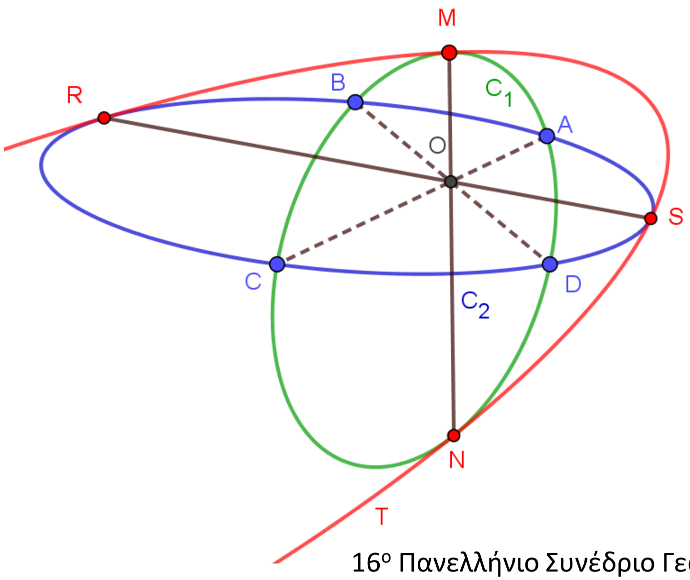
- Ενώ για τη **δευτερεύουσα λύση** T_2 δεν είχαμε βρει ανάλογη (συνθετική) κατασκευή.

Προετοιμάζοντας το έδαφος…

Θεωρώντας δύο τεμνόμενες ελλείψεις, αντί για τρεις…

- αναζητήσαμε όλες τις κωνικές, που εφάπτονται στις δύο τεμνόμενες ελλείψεις.
- Ξεκινήσαμε από μια γνωστή ιδιότητα τεμνομένων κωνικών…

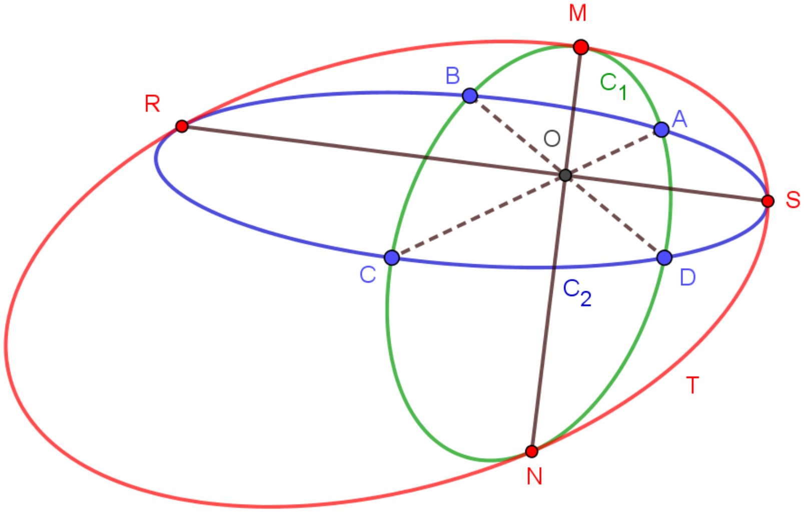




Hatton: *The Principles of Projective Geometry Applied to the Straight Line and Conic.*

Cambridge University Press, 1913.

- Έστω A,B,C,D τα σημεία τομής δύο κωνικών C_1,C_2 και O **οποιοδήποτε** διαγώνιο σημείο του πλήρους τετρακορύφου, που αυτά ορίζουν. Τότε:

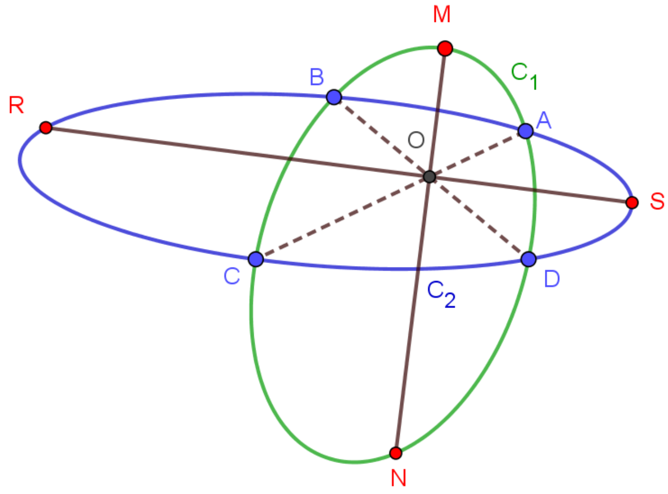


- **Αν υπάρχει κωνική T**, που εφάπτεται στις δύο δοθείσες, τότε:
  - δύο κοινές χορδές των C_1,C_2 και
  - οι χορδές επαφής τους με την T

  συντρέχουν στο O και συγκροτούν μια αρμονική δέσμη ευθειών.

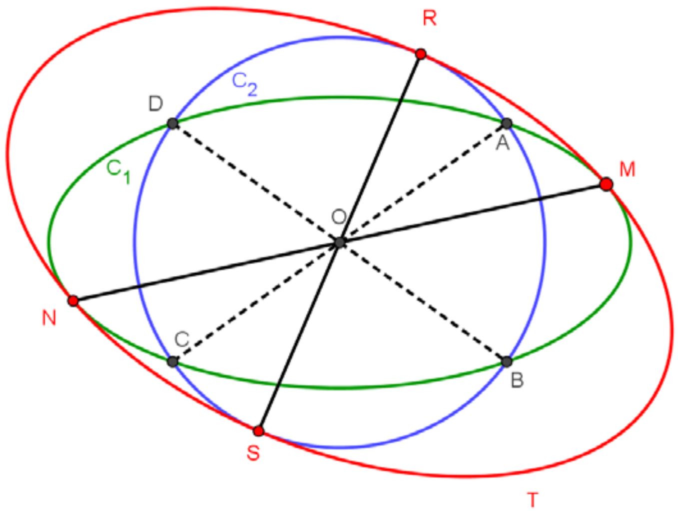
Ερευνήσαμε
αν ισχύει το αντίστροφο…

- Αν δύο κοινές χορδές AC, BD δύο κωνικών C_1,C_2 και δύο χορδές, μια της C_1 και μία της C_2, συντρέχουν στο O και συγκροτούν μια αρμονική δέσμη ευθειών,
- **υπάρχει άραγε κωνική**, που διέρχεται από τα M,N,R,S και εφάπτεται της C_1 στα M,N και της C_2 στα R,S;



Στη μελέτη μας θεωρήσαμε…

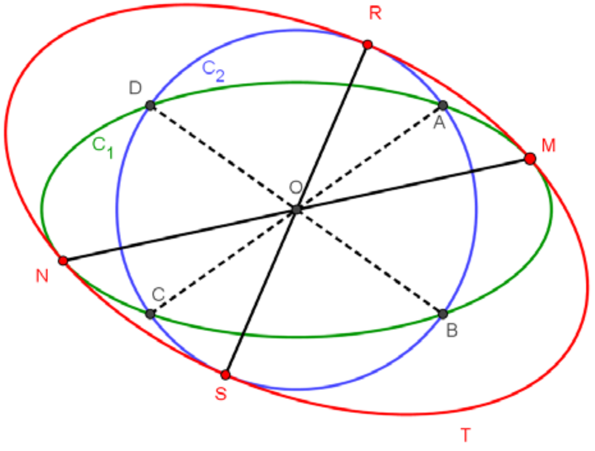
- ως διαγώνιο σημείο O αυτό, που κείται στο εσωτερικό των δύο κωνικών,
- ως κωνικές δύο ελλείψεις, ομόκεντρες,
- μία εκ των δύο ελλείψεων ότι είναι κύκλος.



Αποδείξαμε: Πρόταση 1

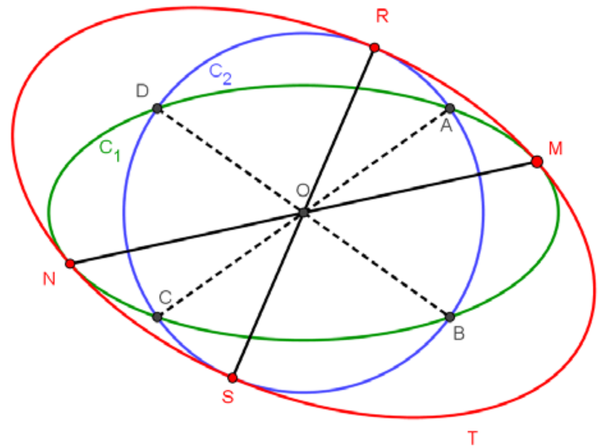
- Έστω C_1,C_2 δύο ελλείψεις με κοινό κέντρο O και σημεία τομής A,B,C,D. Για κάθε διάμετρο MN της C_1 και RS της C_2 που συγκροτούν αρμονική δέσμη με τις AC, BD, υπάρχει μοναδική κωνική T που διέρχεται από τα M,N,R,S και εφάπτεται της C_1 στα M,N και της C_2 στα R,S.

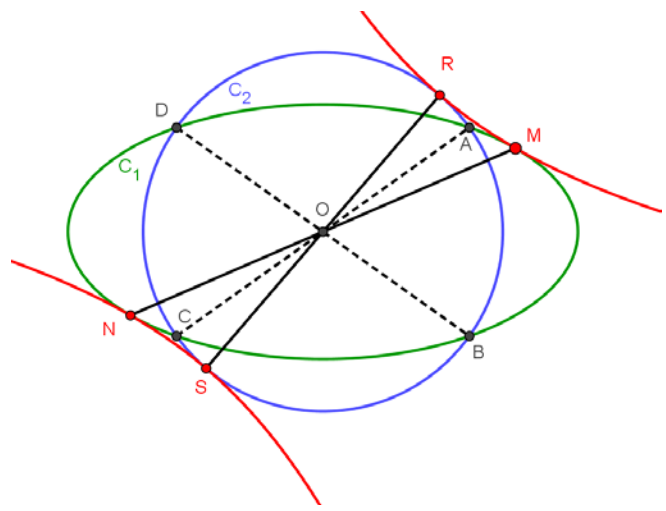
- Η T ονομάζεται κωνική διπλής επαφής ως προς τη χορδή MN.



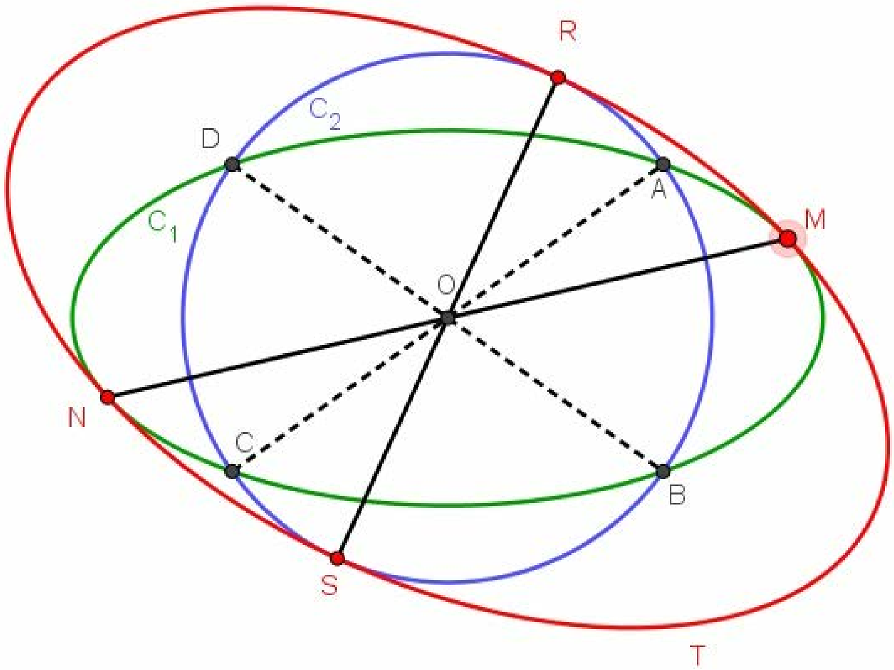
Αποδείξαμε: Πρόταση 2

- Η κωνική διπλής επαφής T μπορεί να είναι
  - Έλλειψη,
  - Υπερβολή ή
  - Εκφυλισμένη Παραβολή (δηλ. ζεύγος παραλλήλων ευθειών ή μια διπλή ευθεία)
- ανάλογα με την επιλογή της θέσης της διαμέτρου MN πάνω στην C_1.

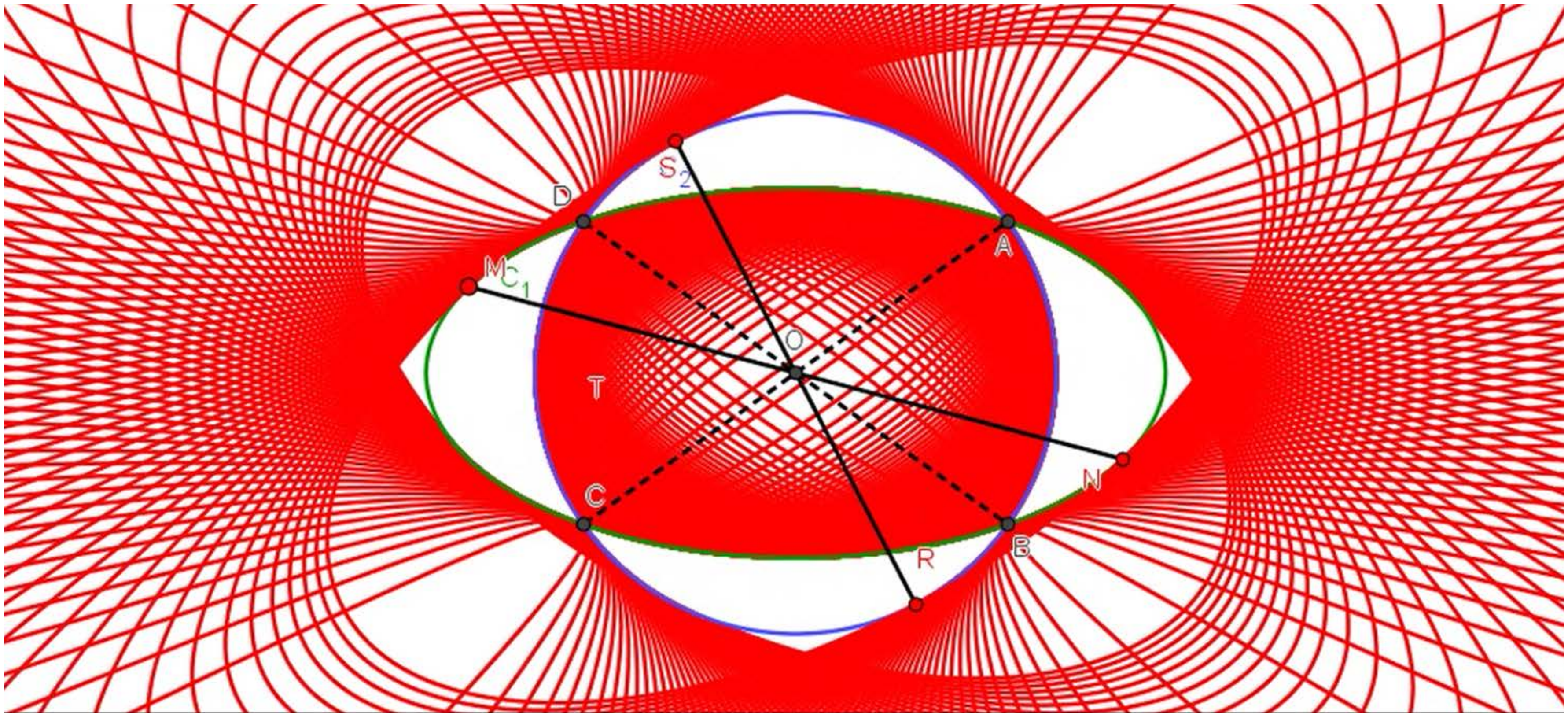




Κωνική Διπλής Επαφής Δύο Τεμνομένων Ελλείψεων

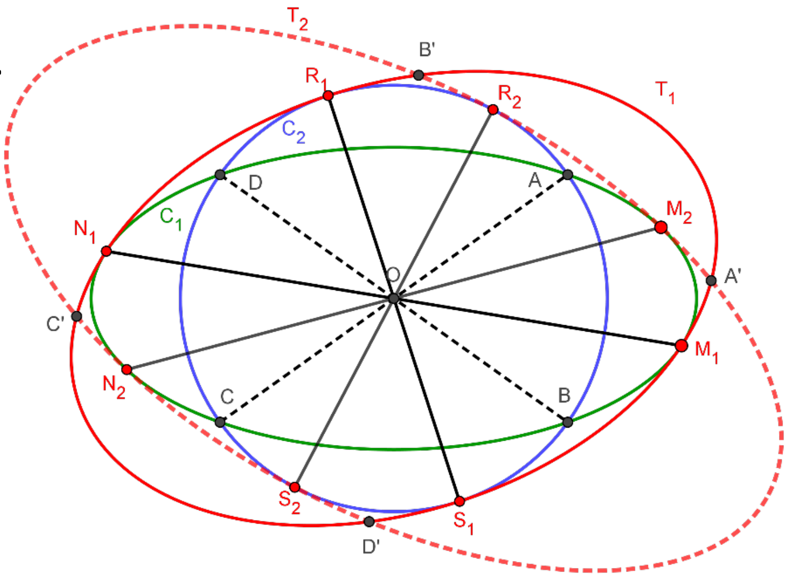


Οικογένεια Κωνικών Διπλής Επαφής Δύο Τεμνομένων Ελλείψεων



Παρατηρήσαμε μια ενέλιξη…

- Καθώς η κωνική διπλής επαφής T διατρέχει τη μονοπαραμετρική οικογένεια,
- δημιουργείται μία **υπερβολική ενέλιξη φ** με κέντρο O και διπλές ακτίνες τις κοινές διαμέτρους AC, BD



$$M_1N_1 \xrightarrow{\phi} R_1S_1$$

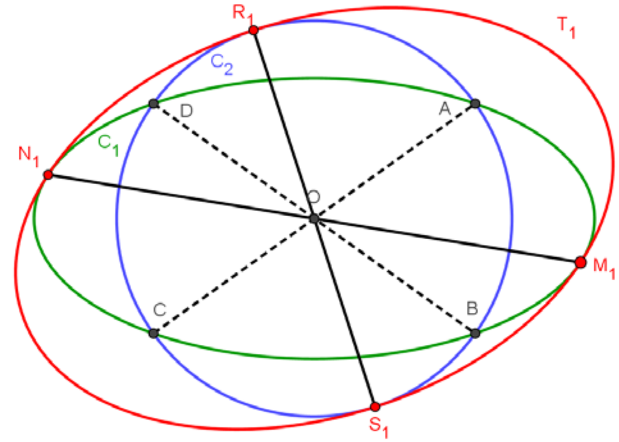
$$M_2N_2 \xrightarrow{\phi} R_2S_2$$

$$AC \xrightarrow{\phi} AC$$

$$BD \xrightarrow{\phi} BD$$

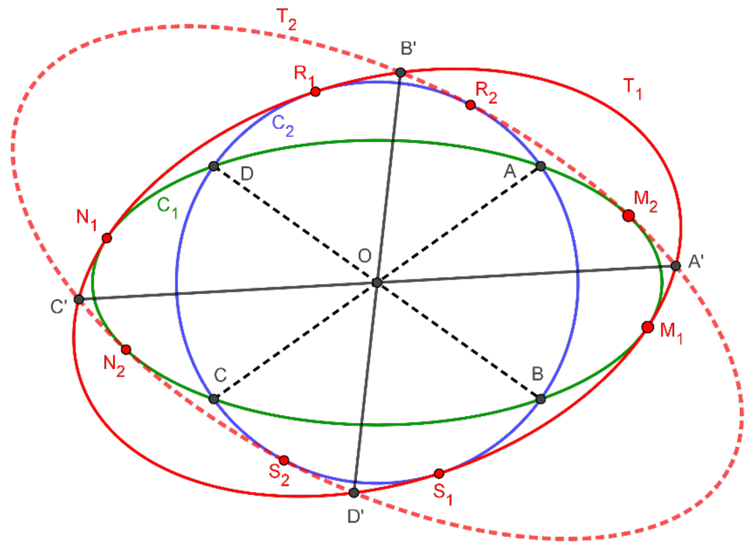
Η ενέλιξη φ...

- **για κάθε μία** κωνική διπλής επαφής T αντιστοιχίζει μεταξύ τους τις διαμέτρους επαφής της T με τις δύο αρχικές κωνικές C_1,C_2



$$M_1N_1 \xrightarrow{\phi} R_1S_1$$

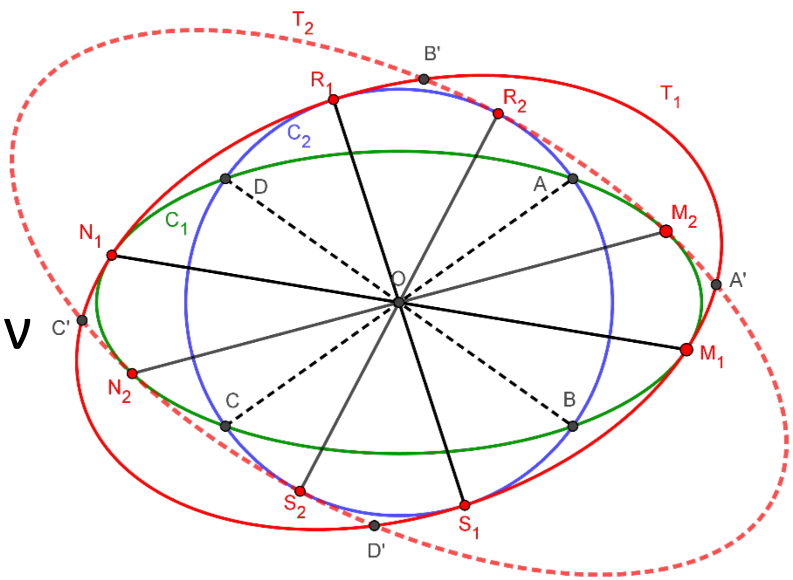
- **για κάθε δύο** κωνικές διπλής επαφής T_1,T_2 που τέμνονται, αντιστοιχίζει μεταξύ τους τις κοινές διαμέτρους τους.



$$A'C' \xrightarrow{\phi} B'D'$$

Λήμμα

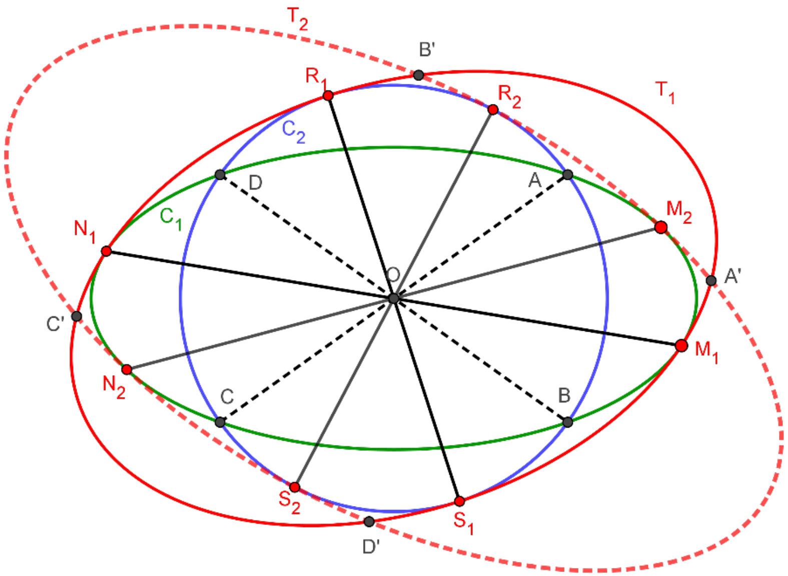
- Αν θεωρήσουμε τώρα δύο κωνικές διπλής επαφής T_1,T_2 με κοινές διαμέτρους Α΄C΄,Β΄D΄
- οι αρχικές κωνικές C_1,C_2 μπορούν να θεωρηθούν κωνικές διπλής επαφής των T_1,T_2
- Τότε δημιουργείται μια νέα **υπερβολική ενέλιξη f** με διπλές ακτίνες τις κοινές διαμέτρους Α΄C΄,Β΄D΄ των T_1,T_2



Λήμμα

- Ως προς την **υπερβολική ενέλιξη f** με διπλές ακτίνες τις κοινές διαμέτρους Α΄C΄, Β΄D΄ των T_1,T_2
- αντιστοιχούν μεταξύ τους

- οι **διάμετροι επαφής** κάθε C_i (i=1,2) με τις T_1,T_2
- και
- οι **κοινές διάμετροι AC, BD** των C_1,C_2



$$M_1N_1 \xrightarrow{f} M_2N_2$$

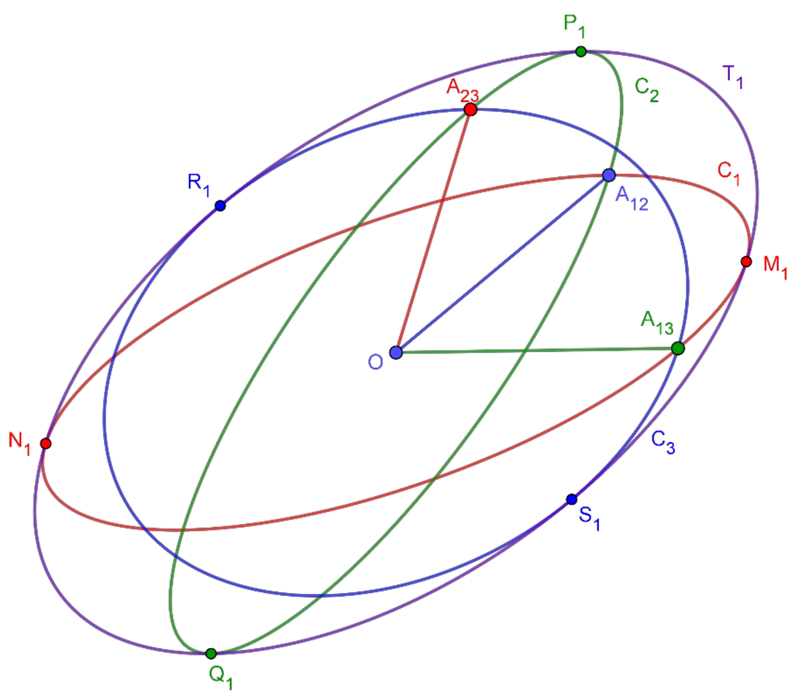
$$R_1S_1 \xrightarrow{f} R_2S_2$$

$$AC \xrightarrow{f} BD$$

$$A'C' \xrightarrow{f} A'C' \quad B'D' \xrightarrow{f} B'D'$$

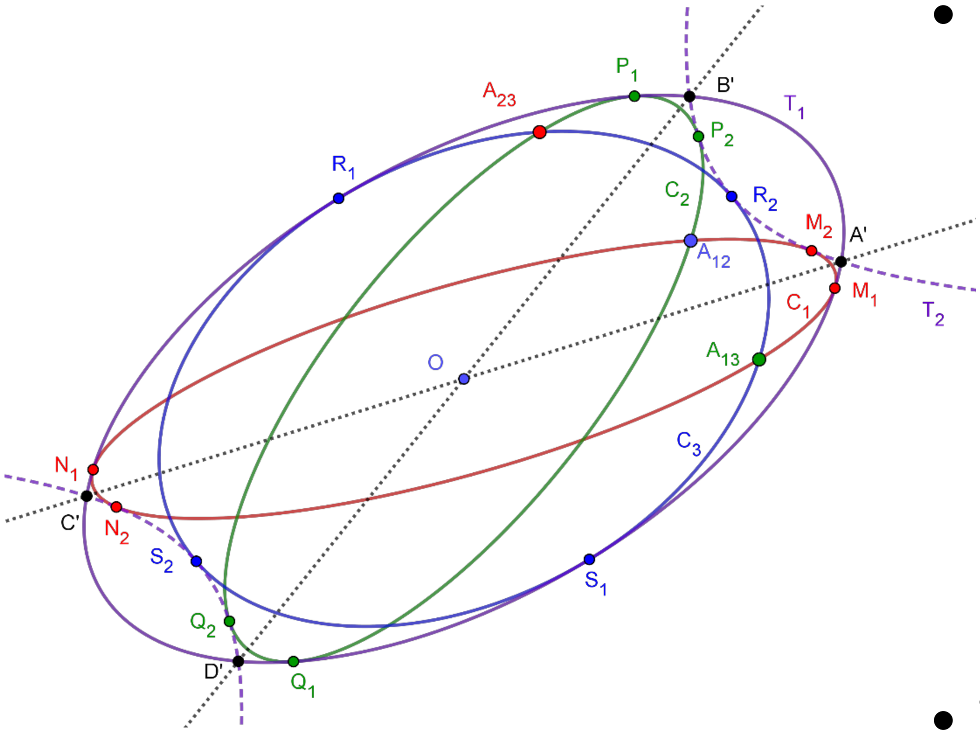
Ας γυρίσουμε στις 3 ελλείψεις…

Τρεις Ελλείψεις Αμοιβαία Συζυγείς



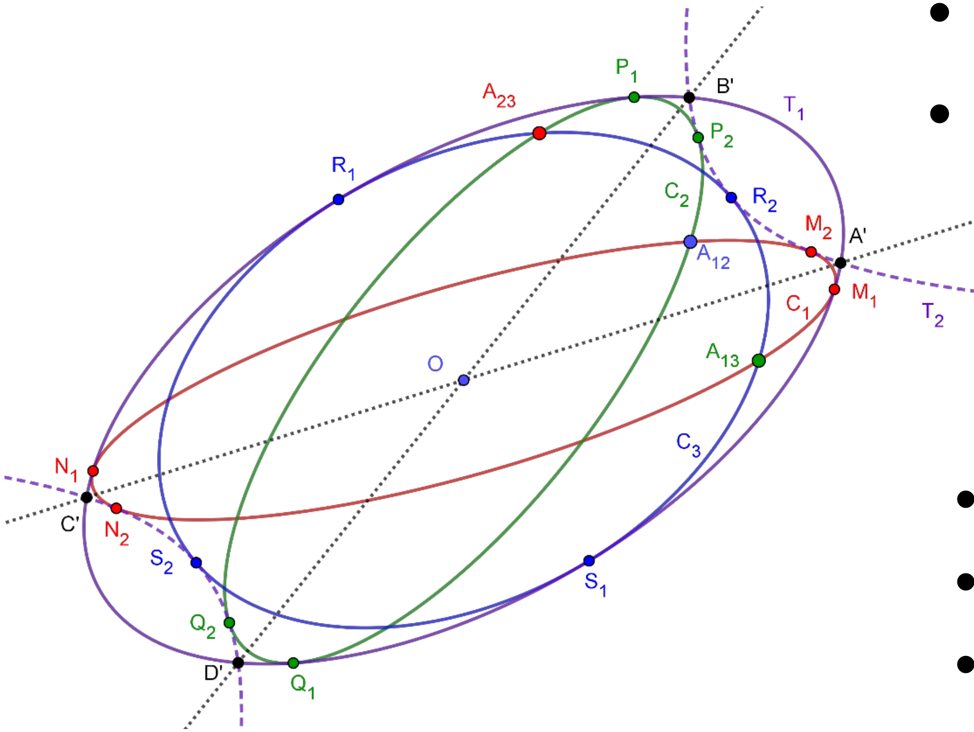
- Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν το **πολύ δύο περιγεγραμμένες κωνικές**, που είναι και ομόκεντρες προς τις αρχικές.
- Και οι δύο είναι κωνικές διπλής επαφής των C_1,C_2,C_3 περιγεγραμμένες σε αυτές.
- Η μία εκ των δύο – η T_1 – υπάρχει πάντα και είναι έλλειψη.

Τρεις Ελλείψεις Αμοιβαία Συζυγείς



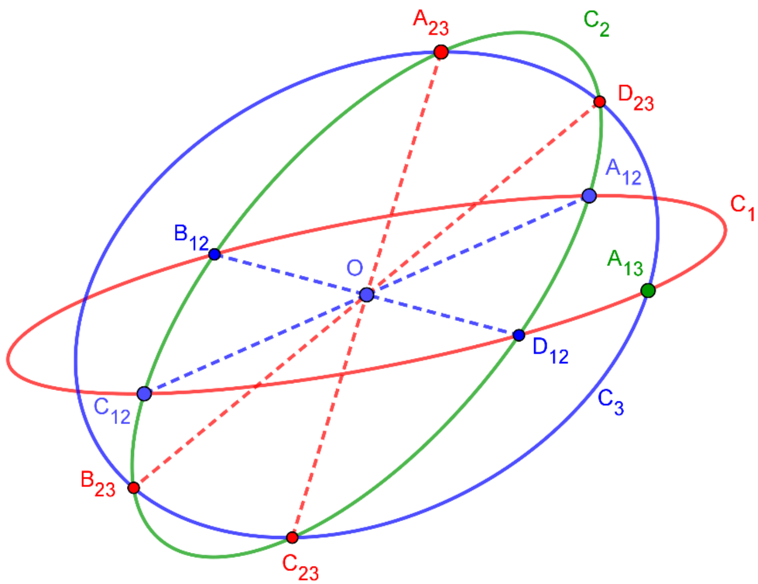
- Η δεύτερη **περιγεγραμμένη** κωνική (αν υπάρχει) είναι
  - έλλειψη,
  - υπερβολή ή
  - εκφυλισμένη παραβολή (δηλ. ζεύγος παραλλήλων ευθειών ή μια διπλή ευθεία)
- Τότε οι T_1,T_2 τέμνονται σε 4 σημεία A΄, B΄, C΄, D΄.

Τρεις Ελλείψεις Αμοιβαία Συζυγείς



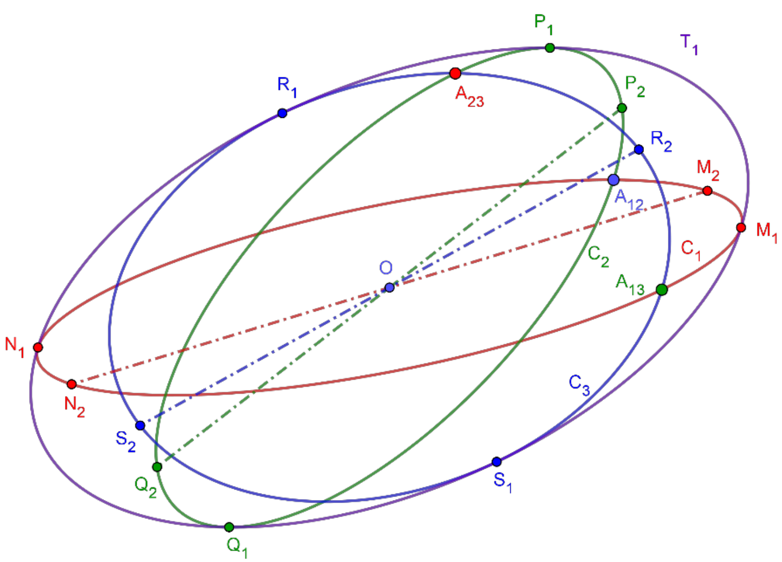
- Σύμφωνα με το λήμμα:
- Οι ευθείες Α΄C΄, Β΄D΄ είναι τότε οι διπλές ακτίνες της **υπερβολικής ενέλιξης f** , ως προς την οποία αντιστοιχούν:
  - οι κοινές διάμετροι των C_1,C_2,
  - οι κοινές διάμετροι των C_1,C_3,
  - οι κοινές διάμετροι των C_2,C_3

Η ενέλιξη f, που ορίζουν τα ζεύγη των κοινών διαμέτρων



- Ωστόσο, **δύο ζεύγη αντιστοίχων ακτίνων (*συζυγών ακτίνων*) αρκούν** για να οριστεί μία ενέλιξη.
- Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την ενέλιξη f αυτή με **δύο από τα τρία** ζεύγη κοινών διαμέτρων, που διαθέτουμε (π.χ. το μπλε ζεύγος και το κόκκινο ζεύγος).

Η ενέλιξη f, που ορίζουν τα ζεύγη των κοινών διαμέτρων

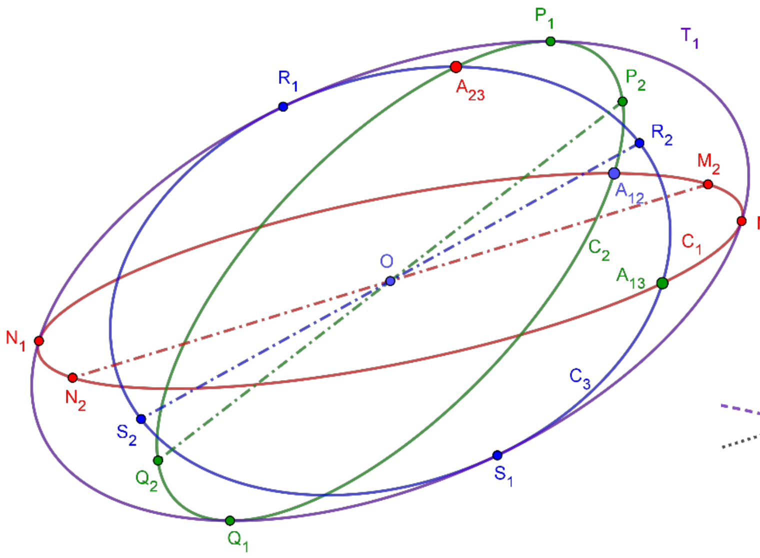


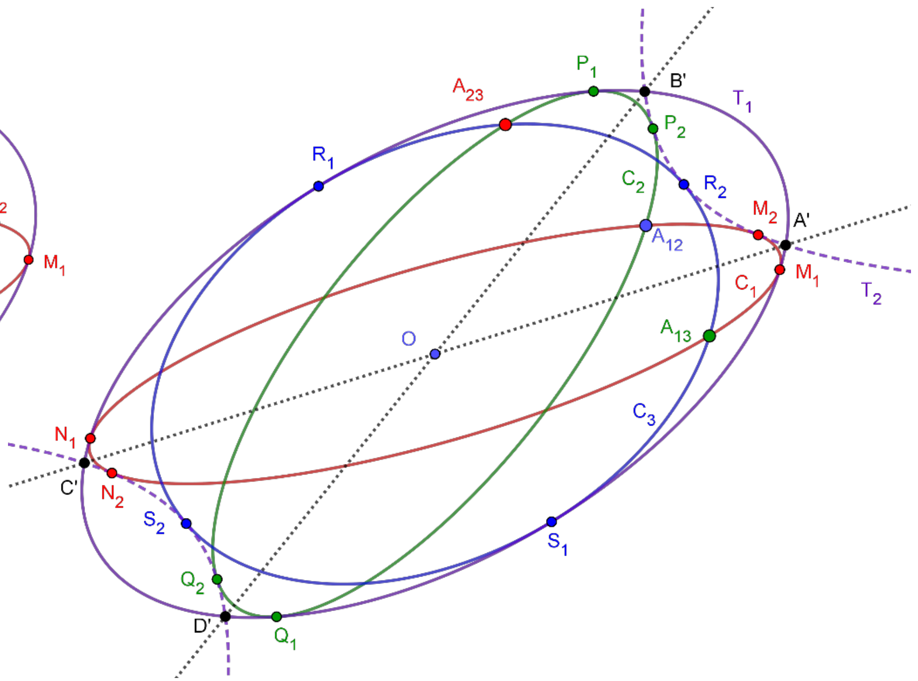
- Σύμφωνα με το λήμμα:
- Μέσω της ενέλιξης αυτής αντιστοιχούν
- η διάμετρος επαφής των T_1,C_i με
- τη διάμετρο επαφής των T_2,C_i,

για κάθε i=1,2,3.

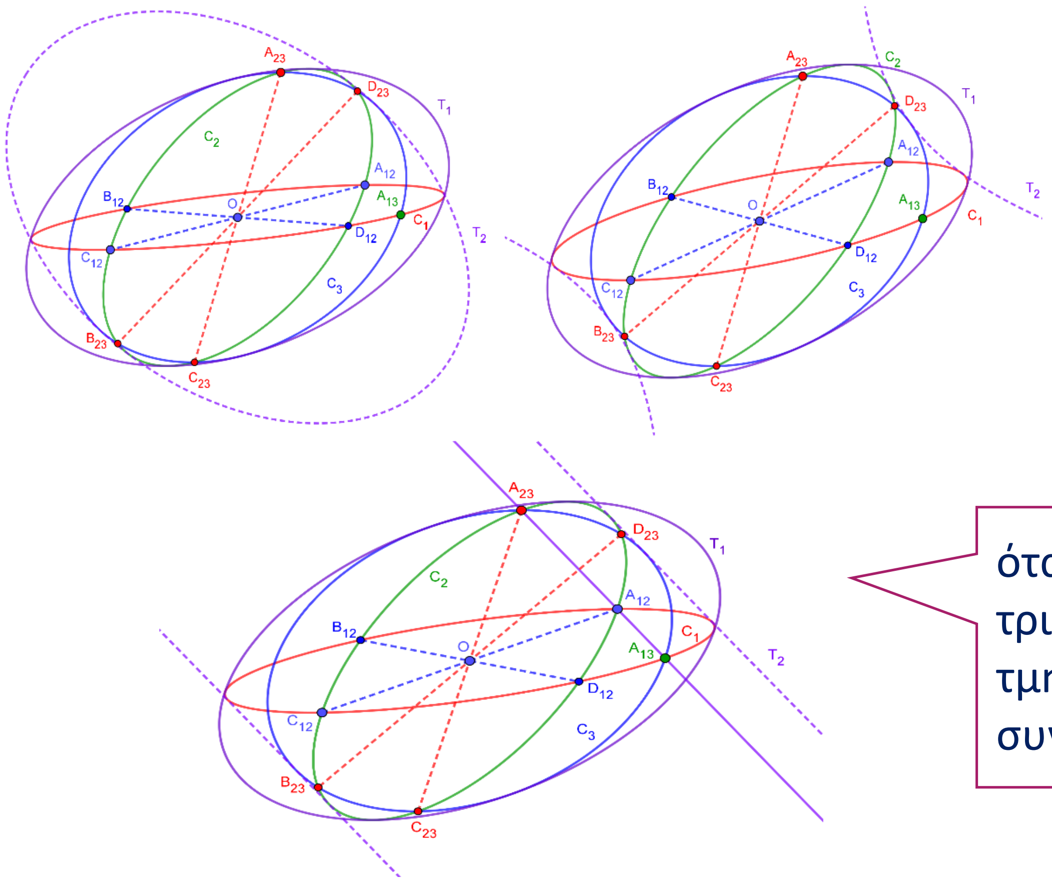
- Έτσι,
  - από την M_1N_1 βρίσκουμε την M_2N_2
  - από την P_1Q_1 βρίσκουμε την P_2Q_2
  - από την R_1S_1 βρίσκουμε την R_2S_2

Η T_2 είναι ακριβώς η κωνική, που διέρχεται από τα M_2,N_2,P_2,Q_2,R_2,S_2





Η T_2 είναι ακριβώς η κωνική, που διέρχεται από τα M_2,N_2,P_2,Q_2,R_2,S_2



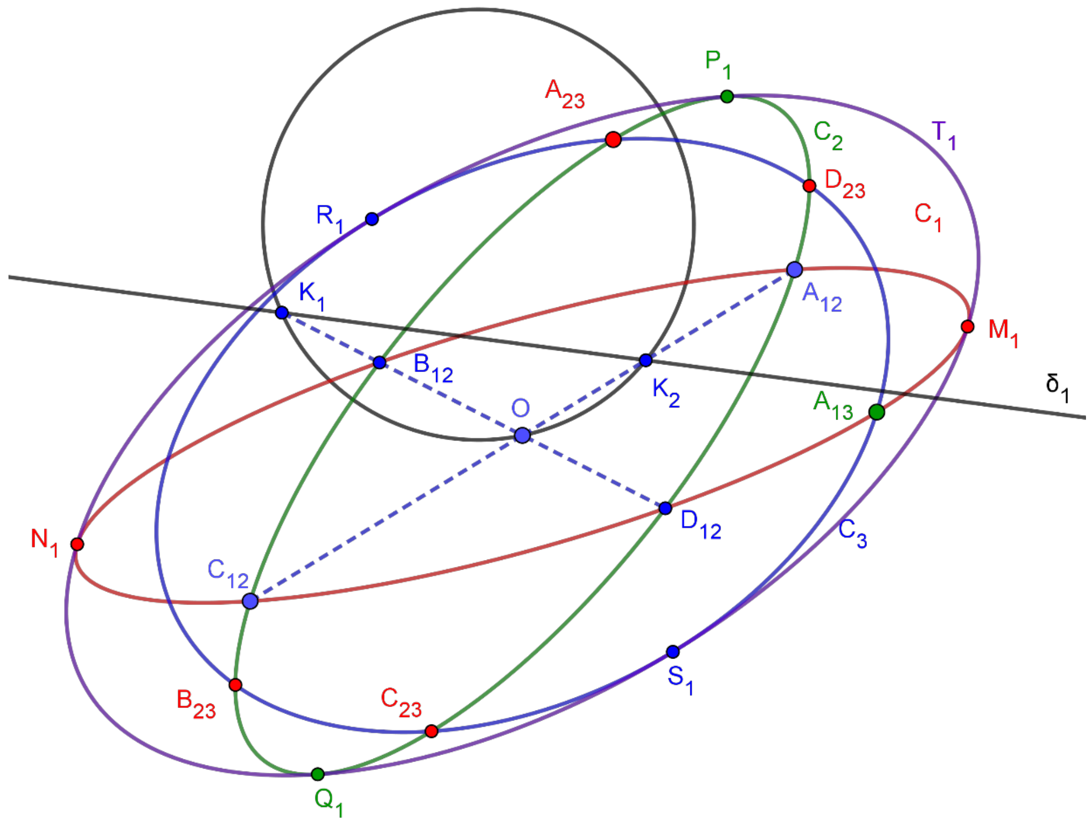
όταν τα άκρα των τριών αρχικών τμημάτων είναι συνευθειακά…

Κατασκευή
συζυγών ακτίνων ενέλιξης

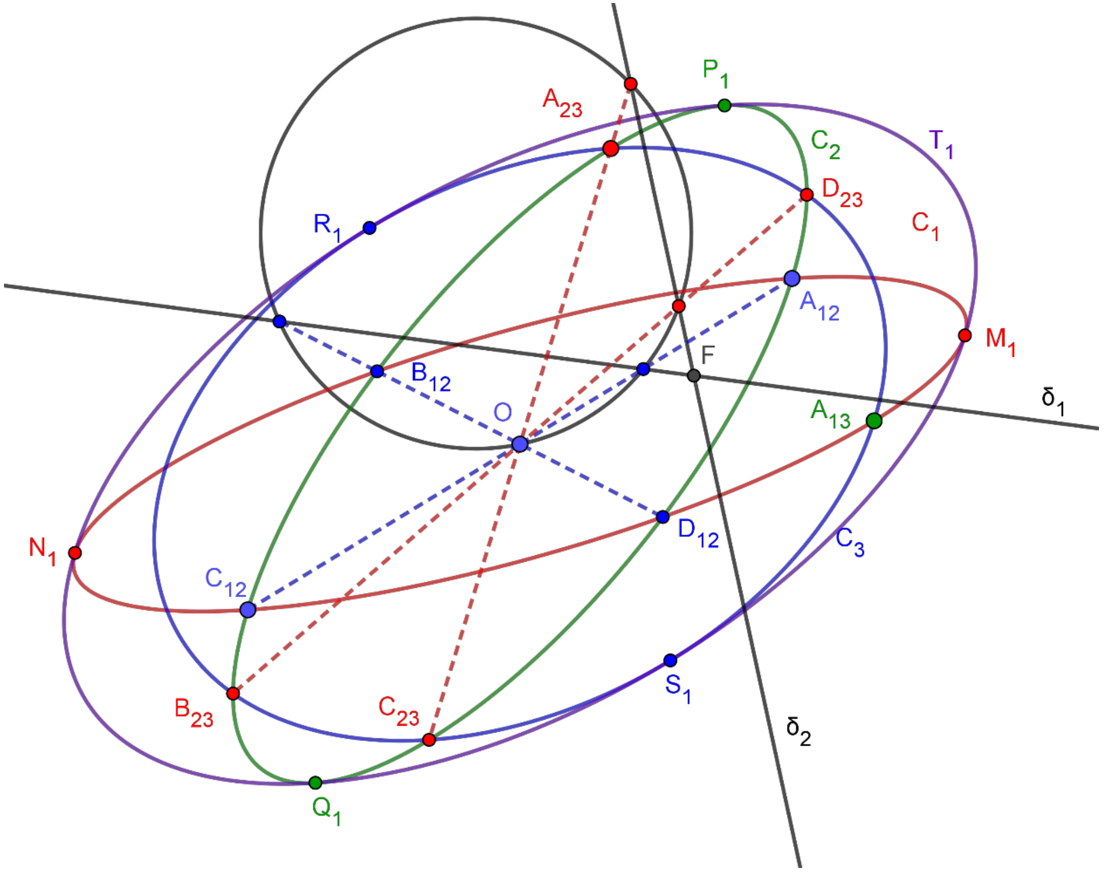
Θεώρημα Frégier

- Θεωρούμε ενέλιξη f πάνω σε δέσμη ευθειών με κέντρο O. Αν το O κείται επί κωνικής c, τότε οι ευθείες, που ενώνουν **τα σημεία τομής δύο συζυγών ακτίνων της δέσμης με την c**, διέρχονται από σταθερό σημείο F.
- Το σημείο F κείται επί ακτίνας της δέσμης, που είναι συζυγής προς την εφαπτομένη της κωνικής c στο O.
- Αντίστροφα, **τα σημεία τομής της κωνικής c με μια ευθεία, που διέρχεται από το F**, ορίζουν ζεύγος συζυγών ακτίνων της δέσμης.

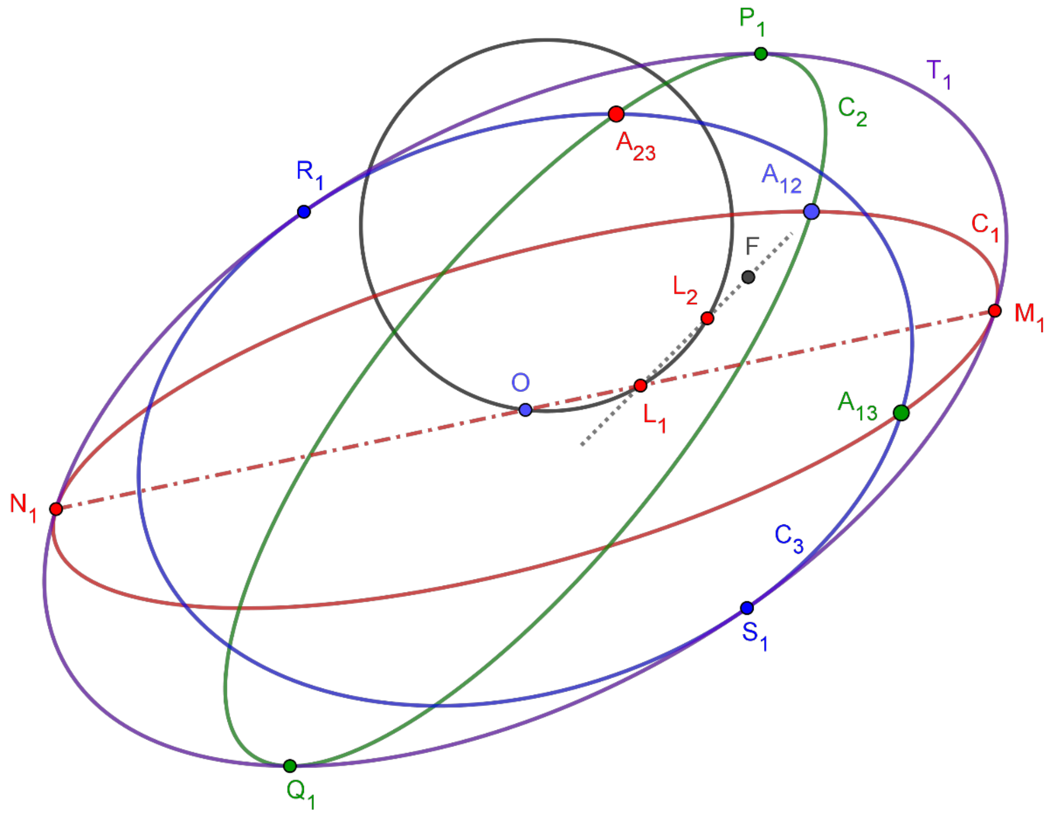
Εφαρμογή του Θεωρήματος Frégier



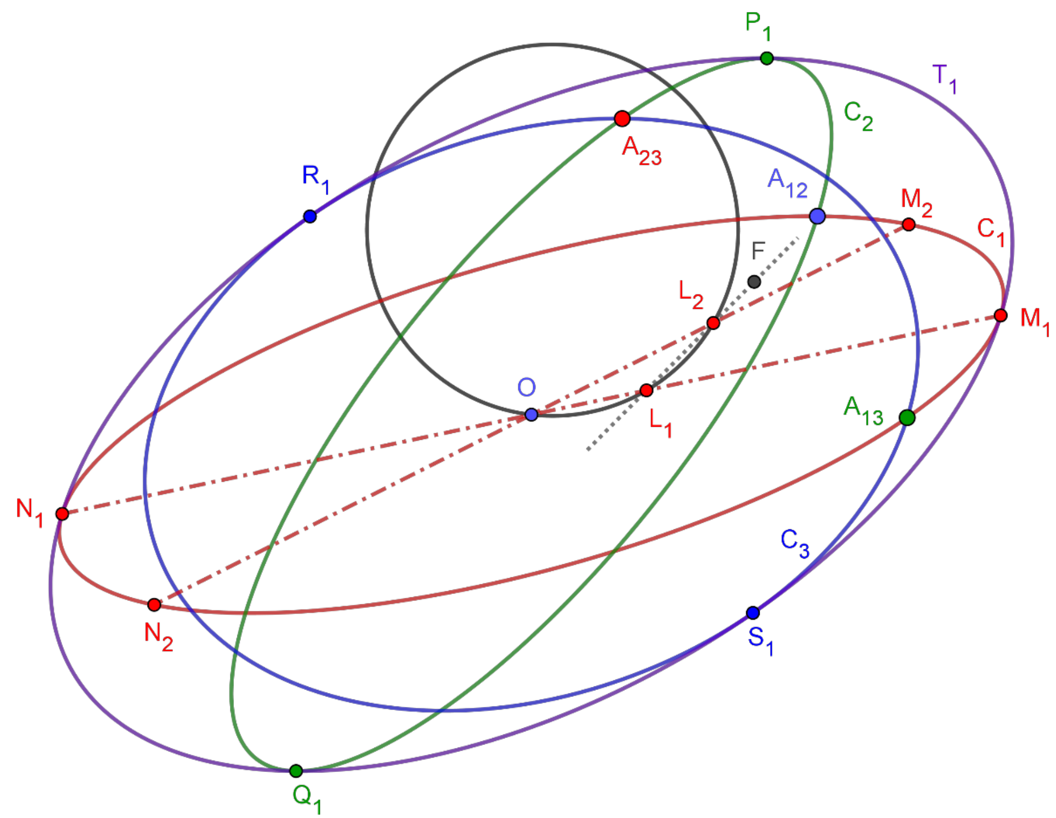
Εφαρμογή του Θεωρήματος Frégier



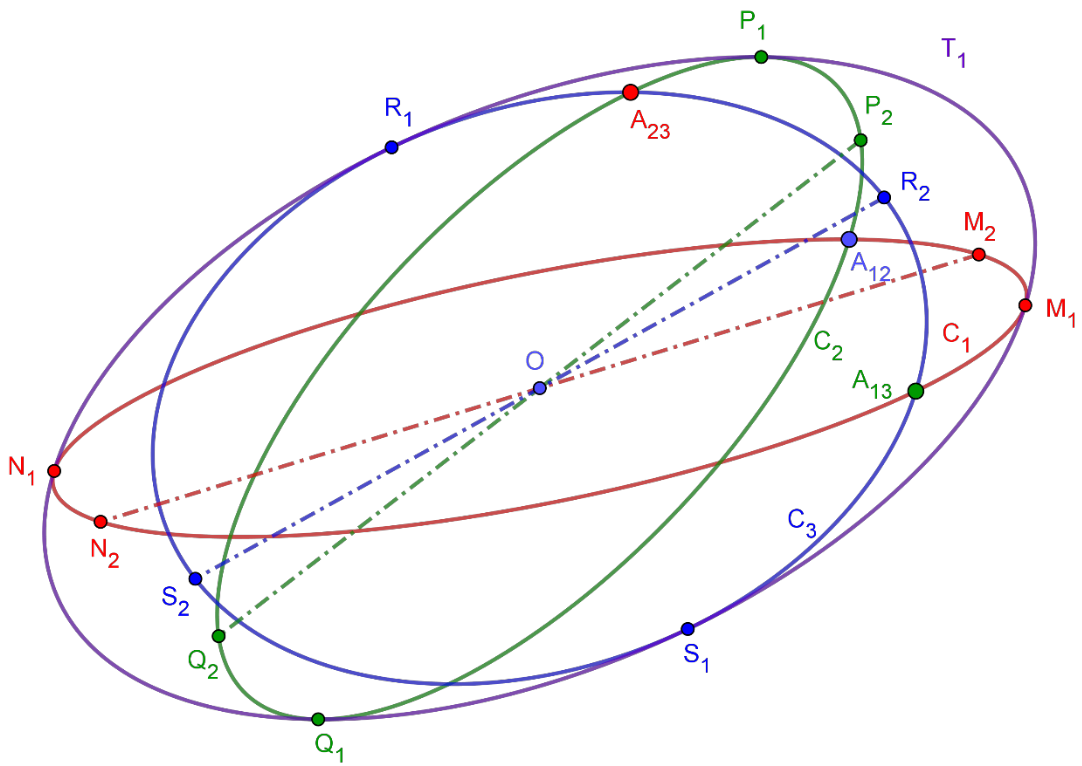
Εφαρμογή του Θεωρήματος Frégier



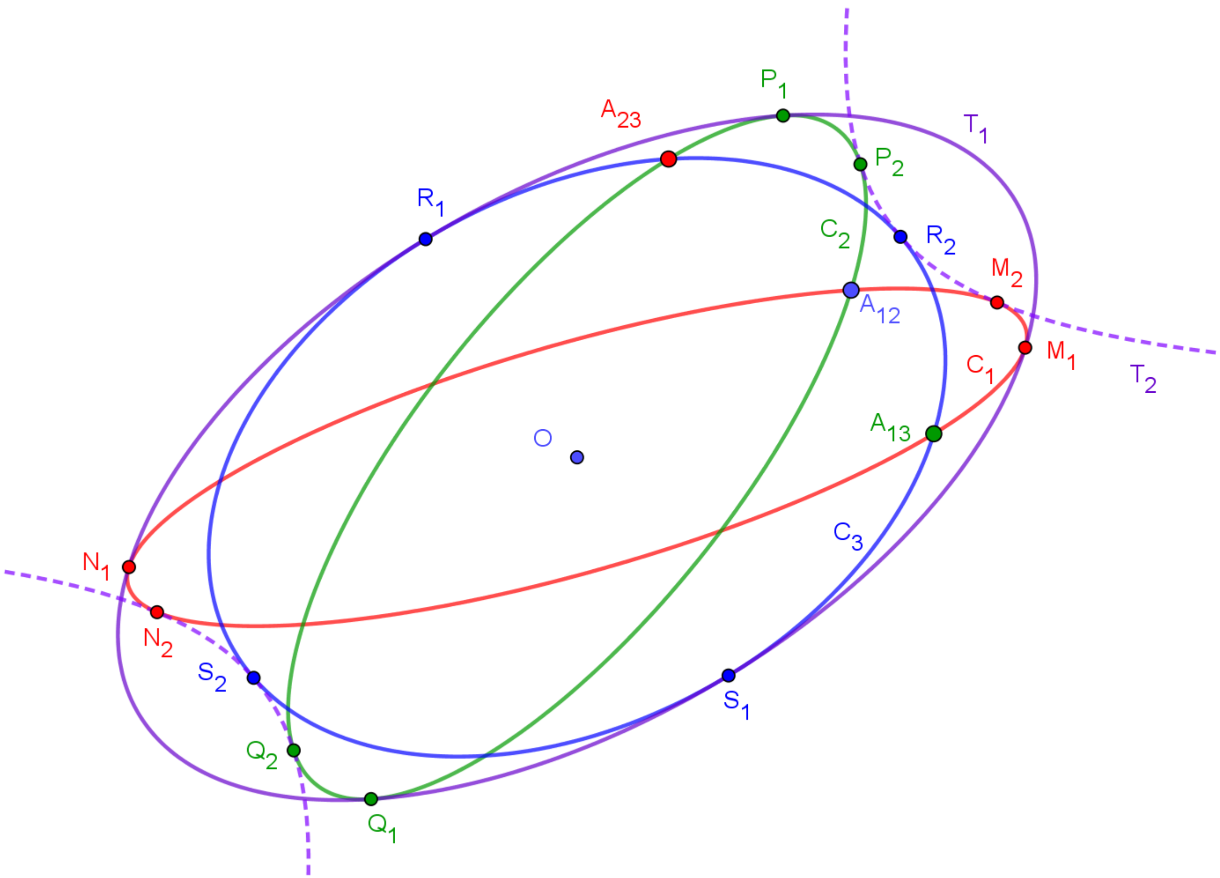
Εφαρμογή του Θεωρήματος Frégier



Εφαρμογή του Θεωρήματος Frégier

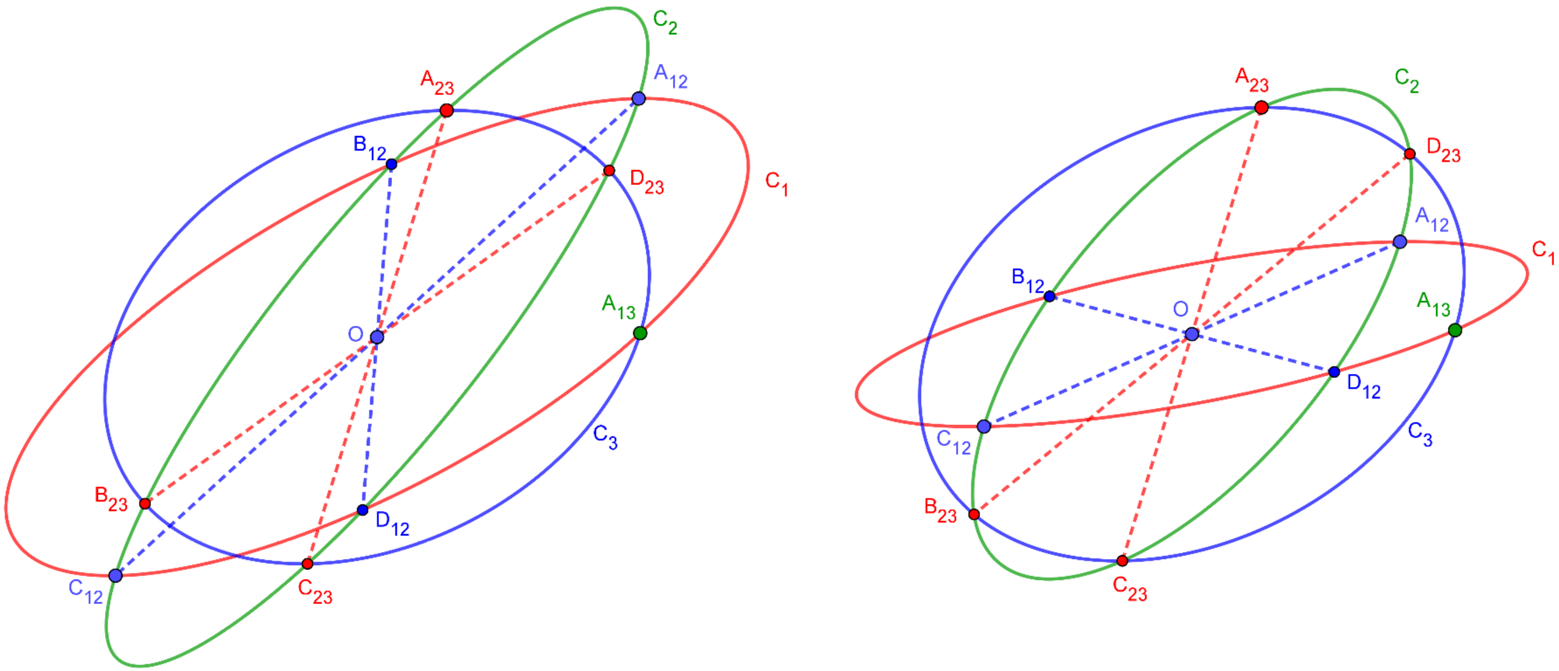


Εφαρμογή του Θεωρήματος Frégier



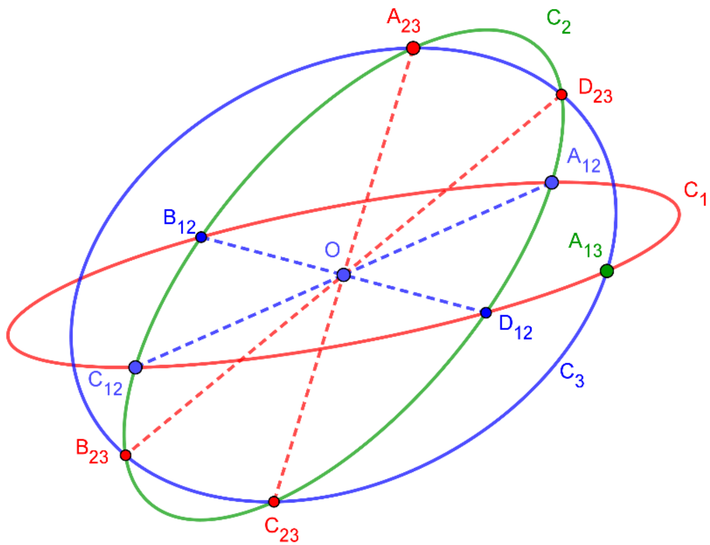
Γενικεύοντας…

Η ενέλιξη f, που ορίζουν τα ζεύγη των κοινών διαμέτρων



Η εξίσωση της ενέλιξης f, που ορίζουν τα ζεύγη των κοινών διαμέτρων

$$\begin{vmatrix} \lambda_{12}\mu_{12} & \lambda_{12}+\mu_{12} & 1 \\ \lambda_{23}\mu_{23} & \lambda_{23}+\mu_{23} & 1 \\ \lambda\mu & \lambda+\mu & 1 \end{vmatrix} = 0$$

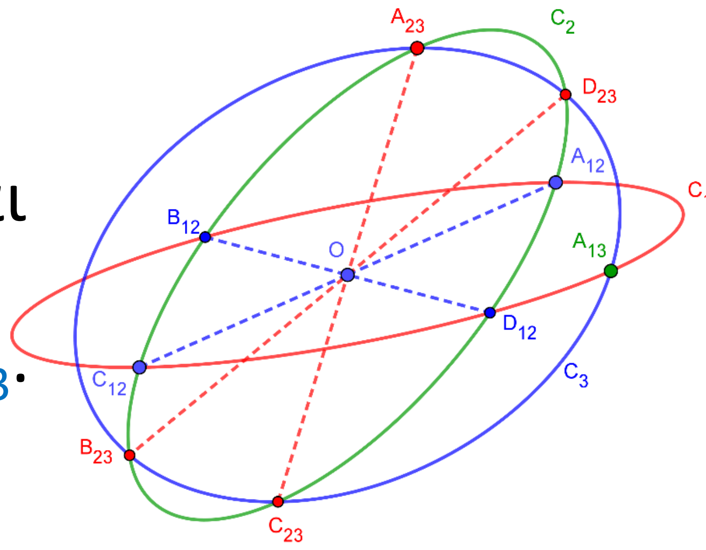


όπου

- λ_{12}, μ_{12} οι συντελεστές διεύθυνσης των μπλε διαμέτρων και
- λ_{23}, μ_{23} οι συντελεστές διεύθυνσης των κόκκινων διαμέτρων

Πρόταση 3

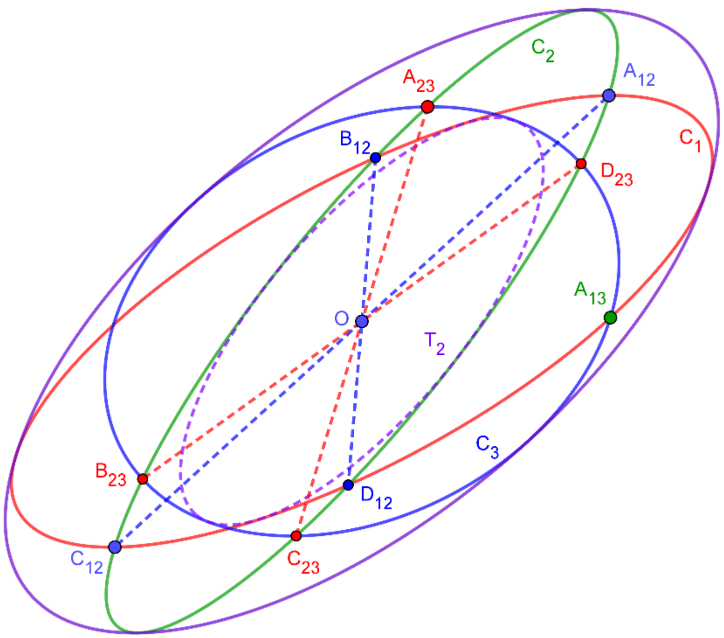
- Έστω C_1, C_2, C_3 τρεις ελλείψεις αμοιβαία συζυγείς με κοινό κέντρο O.
- Έστω f η ενέλιξη, που ορίζεται από τα ζεύγη κοινών διαμέτρων των C_1, C_2 και C_2, C_3.
- Τότε **και οι κοινές διάμετροι των C_1, C_3** είναι συζυγείς ακτίνες ως προς την ενέλιξης f.

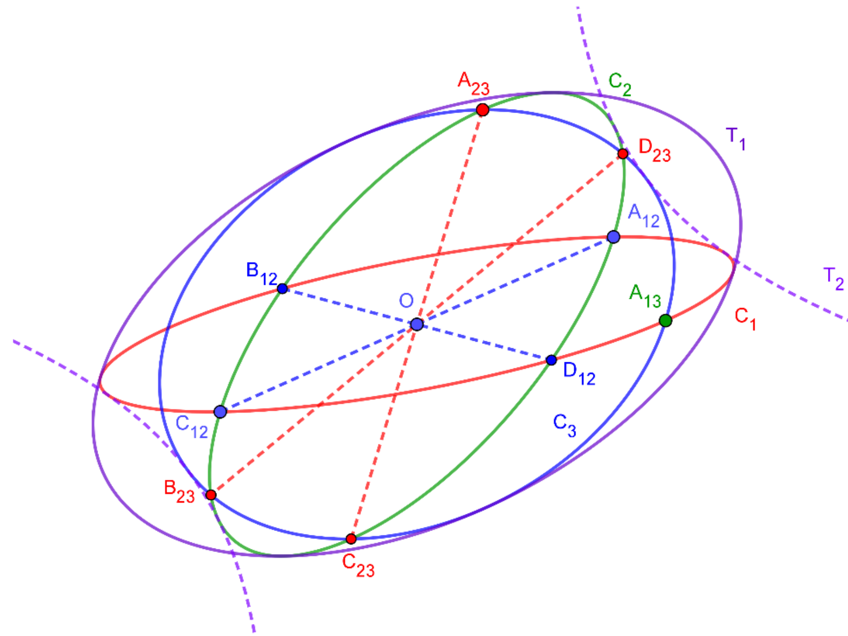


Πρόταση 4

- Έστω C_1,C_2,C_3 τρεις ελλείψεις αμοιβαία συζυγείς με κοινό κέντρο O.
- Έστω T_1 η πρωτεύουσα λύση του προβλήματος των τεσσάρων ελλείψεων και
- f η ενέλιξη, που ορίζεται από οποιαδήποτε δύο από τα τρία ζεύγη κοινών διαμέτρων των C_1,C_2,C_3.
- Τότε **οι συζυγείς ακτίνες** (μέσω της f) **των διαμέτρων επαφής των C_i, T_1** (i=1,2,3) **ορίζουν την δευτερεύουσα λύση T_2** του προβλήματος των τεσσάρων ελλείψεων.

Κωνικές Διπλής Επαφής σε Ενέλιξη





ελλειπτική ενέλιξη $\Longrightarrow$ T_2 εγγεγραμμένη

υπερβολική ενέλιξη $\Longrightarrow$ T_2 περιγεγραμμένη

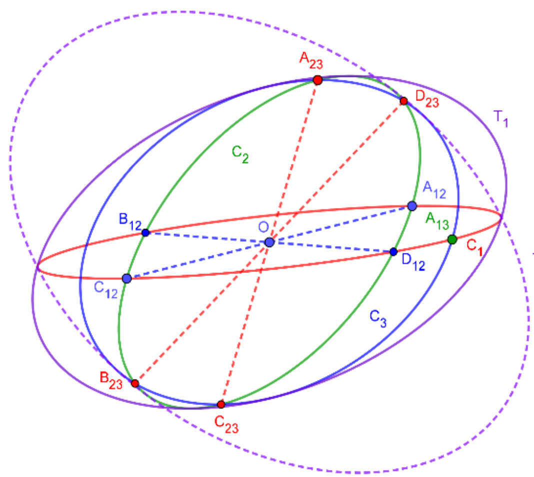
Κωνικές Διπλής Επαφής σε Ενέλιξη

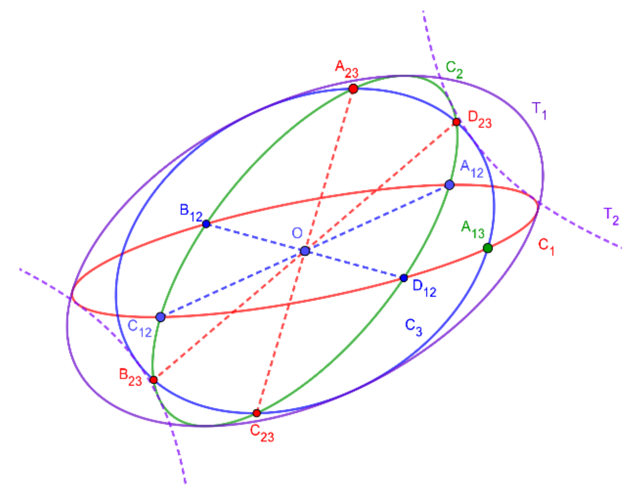
υπερβολική
ενέλιξη

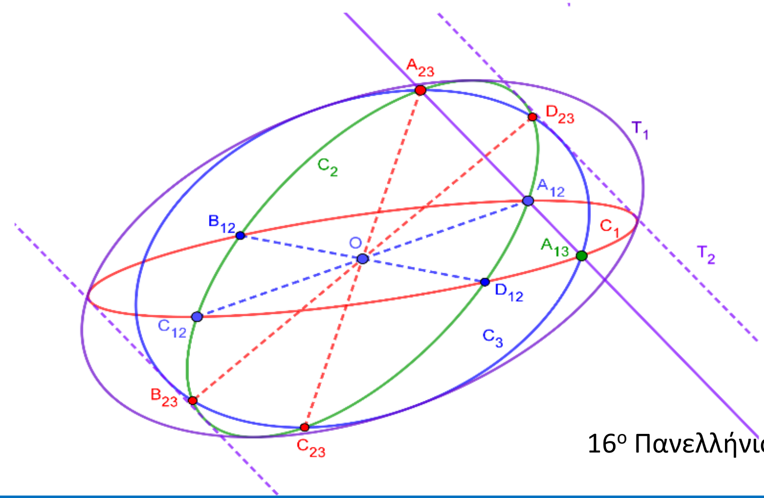
$\Downarrow$

T_2

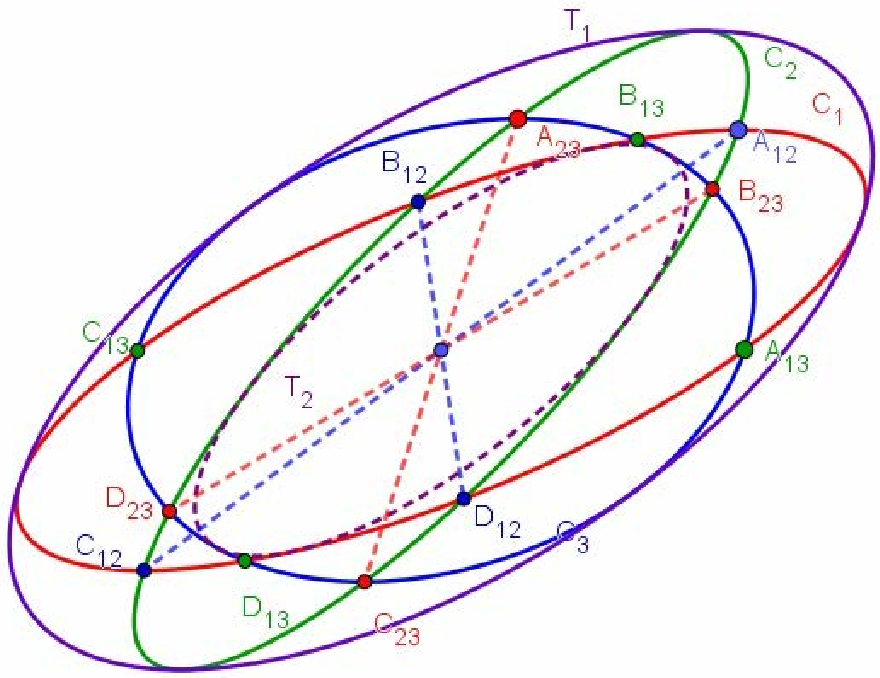
- έλλειψη,
- υπερβολή ή
- εκφυλισμένη παραβολή







Κωνικές Διπλής Επαφής σε Ενέλιξη



Συνοψίζοντας…

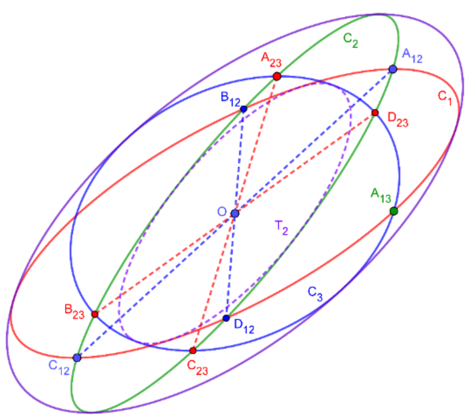
- Δίνονται τρεις αμοιβαία συζυγείς ελλείψεις C_1,C_2,C_3.
- Τα ζεύγη των κοινών διαμέτρων τους ορίζουν ενέλιξη f.
- Κριτήρια Συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας καθορίζουν αν η f είναι υπερβολική ή ελλειπτική.

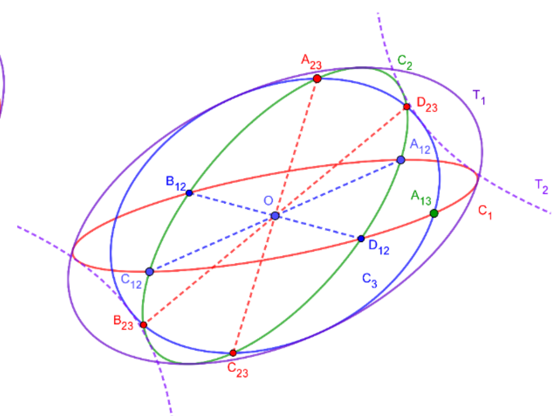
Συνοψίζοντας...

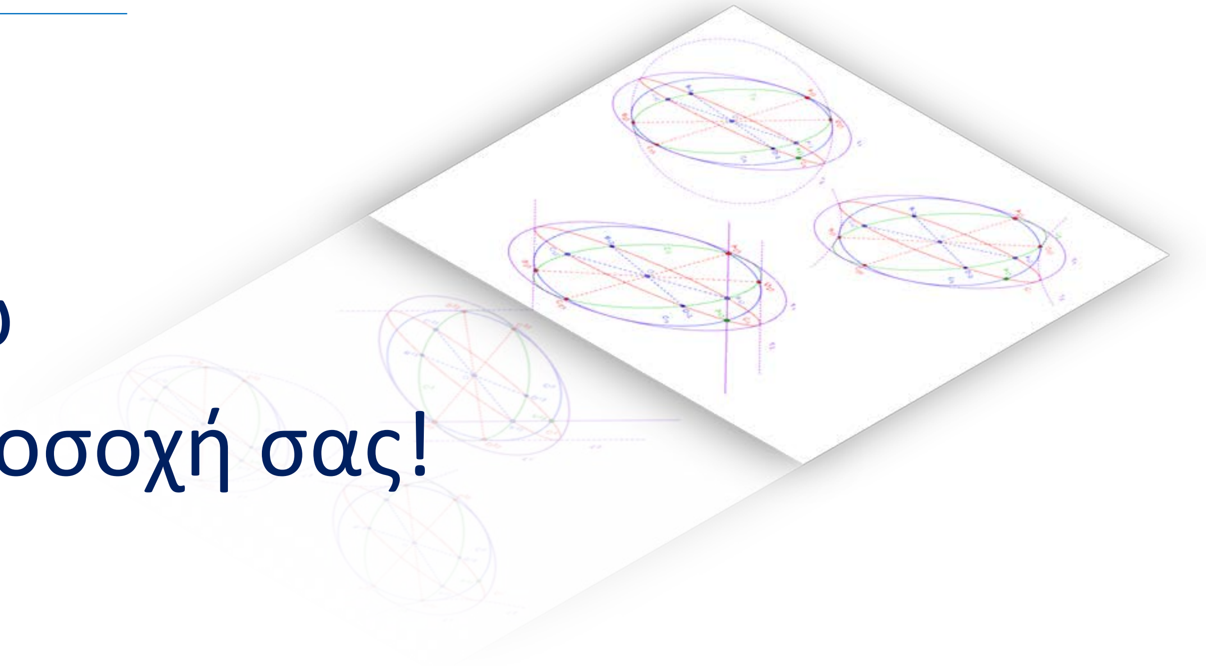
- Αν η f είναι υπερβολική, υπάρχουν ακριβώς δύο κωνικές T_1,T_2 περιγεγραμμένες στις C_1,C_2,C_3.
- Η T_1 είναι πάντα έλλειψη, ενώ η T_2 είναι έλλειψη ή υπερβολή ή εκφυλισμένη παραβολή.
- Σε κάθε περίπτωση οι κοινές διάμετροι των T_1,T_2 αποτελούν τις διπλές ακτίνες της f.
- Αν η f είναι ελλειπτική, υπάρχουν και πάλι ακριβώς δύο κωνικές T_1,T_2 διπλής επαφής των C_1,C_2,C_3, αλλά η μια (T_1) είναι έλλειψη περιγεγραμμένη, ενώ η άλλη (T_2) έλλειψη εγγεγραμμένη στις C_1,C_2,C_3.

Συνοψίζοντας…

- Ανεξάρτητα από το αν η f είναι υπερβολική ή ελλειπτική,
- η T_2 μπορεί να κατασκευαστεί από την T_1 και την ενέλιξη f, καθώς οι διάμετροι επαφής των T_1,C_i και T_2,C_i, i=1,2,3 είναι συζυγείς ακτίνες της ενέλιξης f.







Ευχαριστώ
για την προσοχή σας!

Βιβλιογραφία

- [1] G. Glaeser, H. Stachel, and B. Odehnal: *The Universe of Conics. From the ancient Greeks to 21st century developments*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016. ISBN 978-3-662-45449-7. doi: 10.1007/978-3-662-45450-3.
- [2] J. L. S. Hatton: *The Principles of Projective Geometry Applied to the Straight Line and Conic*. Cambridge University Press, 1913.
- [3] P. Ladopoulos: *Elements of Projective Geometry (2 Vol.)*. A. Karavias Publications, 1966, 1972. In Greek.
- [4] G. Lefkaditis and A. Taouktsoglou: *Double Contact Conics in Involution*. Journal for Geometry and Graphics **28**(1), 55–72, 2024.
- [5] G. Lefkaditis, T. Toulias, and S. Markatis: *The Four Ellipses Problem*. International Journal of Geometry **5**(2), 77–92, 2016.
- [6] G. Lefkaditis, T. Toulias, and S. Markatis: *On the Circumscribing Ellipse of Three Concentric Ellipses*. Forum Geometricorum **17**, 527–547, 2017.
- [7] R. Manfrin: *A Note on a Secondary Pohlke's Projection*. International Journal of Geometry **11**(1), 33–53, 2022.
- [8] H.-P. Schroecker: *Singular Fregier Conics in Non-Euclidean Geometry*. Journal for Geometry and Graphics **21**(2), 201–208, 2017.
- [9] A. Taouktsoglou and G. Lefkaditis: *Family of Conics Having Double Contact With Two Intersecting Ellipses*. Journal for Geometry and Graphics **27**(1), 11–28, 2023.
- [10] T. Toulias and G. Lefkaditis: *Parallel Projected Sphere on a Plane: A New Plane-Geometric Investigation*. International Electronic Journal of Geometry **10**(1), 58–80, 2017. doi: 0.36890/iejg.584443.